数理解析研究所講究録
1195巻 2001年 128-138

大成算經の前集の研究

東京理科大学 理学研究科　後藤 武史 (Takefumi Goto)
Graduate School of Science,
Science University of Tokyo.

1 大成算經の成立

大成算經は、建部賢弘が中心となり、關孝和、建部賢明らが天和3年(1683年)の夏に編集を開始した。そして、元禄中年1695年前後、12巻編集完了。このとき、『算法大成』と名づけられた。この頃から賢弘は、後に6代将軍となる綱豊に仕えることになり忙しくなった。關も老年により携わることが困難になったため、元禄14年(1701年)の冬より賢明がその仕事を続けることになる。そして宝永の末(1710年頃)全20巻が完成。ここで名前を改めて、『大成算經』とした。この本は全て漢文で書かれていて、名前の「大成」が示す通り、当時の数学を網羅した体系的な数学書である。

2 大成算經の構成

大成算經は大きく「首篇」「前集」「中集」「後集」の4つに分けられる。首篇は巻之一に付随している。前集は巻之一から巻之三、中集は巻之四から巻之十五、後集は巻之十六から巻之二十である。前集では、加減乗除、開平方、開立方の説明とそれらの、雑技、変技として色々な方法を取り上げている。中集では、主に図形の問題、日用術などの説明。後集では、方程式の解き方や、その例を挙げている。私が研究しているのは、このうち、首篇と前集である。

3 首篇の内容

首篇では、算数論、数の位の名称、単位、算木の説明、正負、そろばんの運転、用字例が述べられている。つまり、大成算經全20巻を読むに当たり必要となる予備知識を述べているものである。この首篇で特徴のあるものをいくつかをこの節で述べる。

3.1 大数

「大数」において、その数の位を

一・十・百・千・萬・億・兆・京・垓・秭・壤・溝・澗・正・載

と述べている。そのなかでも、この「秭」という漢字は、『塵劫記』では、「秄」と書いて「じょ」または「ちょ」となっている。しかし、これは、本来は「秭」が正しく、写し間違いによってこの漢字になったものと思われる。

また、萬の位は、十萬、百萬、千萬とあるが、億より上は8桁上がりを採用している。例えば億は、一億、十億、百億、千億、萬億、十萬億、百萬億、千萬億とあり、その次を一兆としている。つまり、萬萬億を兆、萬萬兆を京、萬萬京を垓としているのである。

3.2 縦横

「縦横」では算木の説明を述べている。現代のアラビア数字に対応する数字は、

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縦	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

である。本文に

「自一隔位而昇降者皆縦也」

「自十隔位而昇降者皆横也」

とあり、一の位より上下に位を隔てた位、例えば大数では、百位、萬位等、小数では、厘、絲等の位には、算木を縦に置く。これに対して、十の位より上下に位を隔てた位、例えば大数では、千位、十萬位等、小数では、分、毛等の位には、算木を横に置く。

3.3 上退

「上退」ではそろばんの運転を述べている。

「凡盤横梁上二子者以一子宛五梁下五子者各以一子宛一而致諸用也」

と本文で述べている事から、中国の数学書『算法統宗』と同じ、梁上二子、梁下五子のそろばんを使用していることがわかる。ここでは、「上法」「退法」を述べており、この二つをあわせて「上退」としている。

「上法」では、そろばん上で1億2345萬6789を一遍毎に足すという操作を行っている。上一遍ではそろばんの目は、123456789。上二遍では、236913578。上三遍では、370370367となる。このようにして九遍まで操作を行い、「上法」が終了である。

「上法」が終了したそろばんの目をそのままに、逆に1億2345萬6789

を一遍毎に引いていくのが「退法」である。もちろん、退一遍は上八遍と同じ数字になっている。そして、これを繰り返し、退九遍まで行うとちょうど0になる。この「上退」を行うことで、そろばんの運転方法を学ぶことができ、また、練習することができるわけである。

4 巻之一

巻之一では、加、減、乗、除、開方を説明している。ここで、開方というのは開平方、開立方などのことである。これら5つのことを合わせて、五技と呼んでいて、この五技に関しての基本的な計算法と例題を挙げている。

4.1 因乗

「因乗」は同数を累ねて加える者を謂うとある。加を繰り返す事でも求められるが、それでは遅いので句訣を制して数を得る。これを「釋九数」、または「九九合数」という。今で言う「九九」である。

「法数（乗数）」が「単位（1位）」の時は「因」といい、「衆位（2位以上）」の時は「乗」という。この二つをあわせて、「因乗」としているのである。

「如を言えば位を隔て十を言えばその身に就く」とあるがこれは、そろばんの運転の仕方を説明しており「二二如四」など、「如」がつけば一つ下の位にその数を置き、「五九四十五」など、十の位の数が出てくれば本位にその数を置き、一の位は次位に置くというような事である。現在の掛け算九九にも「二二が四」のように「が」という「如」に相当する言葉がつく場合がある。これは、単純に口調を整えるという意味だけではなく、このそろばん上の計算の名残であろう。

4.2 帰除

「帰除」は同数を累ねて減ずる者を謂うとある。「法数（除数）」が「単位（1位）」の時は「帰」「衆位（2位以上）」の時は「除」という。この二つをあわせて「帰除」としているのである。

また、「帰」は、「九帰句訣」を使い、「除」は「九帰句訣」と「撞除句訣」の両句を使う。これらは割り算の九九のようなもので、そろばん上で割り算を行う場合に使用する。

形としては、「釋九数」に似ているが、それの表すところは

（除数）（被除数）（商）（余り）

となっている。例えば「六二三十二」とは、「六で二を割ると商が三で余りが二」という意味である。ここで、「十」というものがあるが、これはそろばんでの割り算の便宜上使用するものである。
「釋九数」と「九帰句訣」の違いは
少ない数、多い数という順序の場合は「釋九数」（三四十二など）
多い数、少ない数という順序の場合は「九帰句訣」（四三七十二など）
となる。このように順序により、「釋九数」と「九帰句決」を区別するため、「釋九数」は45個しか存在しないのであろう。

4.3 定位

そろばん上で「因乗」や「帰除」を行うと一の位の位置がずれる。それでは、正しい計算結果がえられないため、位を決定するということが必要になる。そのために行うのが「定位」である。
「因乗」の場合は、商首の上の位を法一位に当てて法位の数に従って大数はこれを進め、小数はこれを退く。「帰除」の場合は、商首の下の位を法一位に当てて法位の数に従って大数はこれを退き、小数はこれを進める。こうして進退を施した時の法首の位置が商首の位となる。

因乗の場合
４９０×１３＝６３７０
法　　　実
１３　　４９０
十一　　百十一
商　　　　６３７
千百十一分
↑
商首
十一
↑
法首
↓ここが商首の位になる
千百十一
６３７０

法が小数の時は商首の一つ上の位より下に向かい分、厘、毛と数えて

いき、法首の位置まで数えたその位が商首の位になる。

帰除の場合

３５３６÷１６＝２２１

法　　　実

１６　　　３５３６

十一　　　千百十一

商　　２２１

萬千百十一

↑

商首

一十

↑

法首

↓ここが商首の位になる

百十一

２２１

法が小数の時は商首の一つ下の位より上に向かい分、厘、毛と数えていき、法首の位置まで数えたその位が商首の位になる。

4.4 巻之一の校本

大成算經は現在、原本が存在せず、写本のみが存在している。また、誤記が多いこともあり、今まであまり研究されてこなかった。そこで、原本により近いと思われる校本を作成しようと考え、巻之一に関しては、校本を作成した。作成方法としては、以下の5つの写本、

東北大学狩野文庫所蔵のもの

東京大学中央図書館所蔵のもの

京都大学理学部数学教室所蔵のもの（2本）

東京理科大学近代科学資料館所蔵のもの

を比較したところ、180箇所に上る相違点を発見した。そこで、内容を考えることにより、どの漢字が正しい漢字であるか、正誤を決定した。こうして、この度東京大学で発表された「GTフォント」を使用して、校本を作成した。

巻之二、巻之三については現在作成中である。

5 巻之二

巻之二では、雑技と称して遺法の説明をしている。ここで、遺法とは、特殊な計算法で、「常には用いないがたまに功を為す方法である。」と本文で述べている。ここで取り扱っているのは、乗、除、開方に関する遺法である。乗の遺法は11、除の遺法は6つ、開方の遺法は10である。

乗の遺法は、重乗、更乗、截乗、孤乗、破頭乗、棹尾乗、隔位乗、穿乗、損乗、身外加、身前加の11。除の遺法は、重除、○除、穿除、益除、身外減、身前減の6つ。ここで「○除」というものがあるが、本来は○の部分に漢字が入ると思われる。しかしどの写本を見ても、また目次を参照しても、ここに当たる漢字が見当たらなかったため、このように表記した。開方の遺法は、積平円、開立円、帯従開方、減従開方、益積開方、減積開方、飜積開方、帰除開方、損益開方、相応開方の10である。

巻之二の開方では、巻之一の開方の方法とは多少違っているが、その方法を使用することで、2次方程式を正しく解くことができる。また、この例題から、2次方程式の解法は江戸時代には確立されていたことが推測される。

さらに巻之二では算木やそろばんを使用しない計算法も説明している。金蝉脱殻、二字法、鋪地錦、一筆錦、井字法、一掌金の6つである。これら6つは紙上、もしくは卦の布を使用して、さらには手を使用して計算をしている。

6 巻之三

巻之三では、変技として、加減、乗除、開方について述べている。

6.1 加減

加減の変技は、加、減、兼加減にわかれている。ここで、兼加減とは、加と減の混合問題のことである。これらの3つに関して交換法則と結合法則の説明をしている。ここでは、綴求と括求という2つの求め方を述べている。綴求は、順番を入れ替えて、順序通りに計算をする方法である。それに対して括求は、正の数、負の数をそれぞれまとめ、その後に計算する方法である。「括求の方が理に適っているので、こちらを一般に使用する。」と本文で述べている。

例えば、$400+300-200-160$ を考えたときには、

$$\left.\begin{array}{l}\{(400+300)-200\}-160\\ \{(400-200)+300\}-160\\ \{(400-200)-160\}+300\end{array}\right\}\text{綴求}$$

$$(400+300)-(200+160)\ \}\text{括求}$$

となる。

6.2 乗除

乗除の変技は乗法、除法、兼乗除にわかれている。兼乗除は、乗と除の混合問題のことである。これらの3つに関して交換法則と結合法則の説明をしている。ここでも加減の変技と同様に、綴求と括求という2つの求め方を述べている。綴求は順番をいれかえて、順序通りに計算をする方法である。括求は乗数、除数をそれぞれまとめた後、除法を施す方法である。綴求は問題により、途中で不尽数、つまり無限小数が出てくる可能性があり、そのため、正しい答えが求められない場合がある。一方、括求は、途中で不尽数が出てこないため、正しい答えを求めることができる。このことから、括求を一般に使用する。

例えば、$3\times 60\div 160\div 0.015$ を考えたときには、

$$\left.\begin{array}{l}\{(60\div 0.015)\div 160\}\times 3\\ \{(60\div 0.015)\times 3\}\div 160\\ \{(60\times 3)\div 0.015\}\div 160\end{array}\right\}\text{綴求}$$

$$(3\times 60)\div(160\times 0.015)\ \}\text{括求}$$

となる。

6.3 開方

開方の変技は、開出総法、三式、十商、適盡方級法、替数の5つである。巻之一、巻之二では開方は、例題によって説明されている程度であったが、ここでは、一般の代数方程式の解法に関しての詳しい説明がある。このことから、既にこのころには、代数方程式の解法が確立されていたことがわかる。

また、巻之三では次元を意識していると思われる。加減、乗除、開方のイメージとして、加減は数直線、乗除、開方は1次自乗は平形、2次自乗は立形に擬えている。これにより、次元を意識していることがわかる。

しかし、単位に関しては曖昧な部分がみられる。

「適尽方級法」では、2次から5次方程式までの判別式を述べている。その後の「替数」では、その判別式を利用して、解を持たない方程式に関して、係数の符号を変えずに解を持たせるために、係数を変える方法を述べている。

例えば2次方程式を、

$$ax^2+bx+c=0$$

とすると判別式は、

$$D=b^2-4ac$$

となる。この場合は正の項が一つと負の項が一つである。

大成算經では、「平方適尽方級相乗法」として、

「実廉四段寄　方冪一段消」

とあり、これは、

$$D=4ac-b^2$$

を表している。同じく正の項が一つと負の項が一つであるが、符号が逆になっている。しかし、「替数」では不等号を逆にして係数を替えているため、正しい計算をしていることになる。

判別式を導き出す方法としては

$$f(x)=0$$

という方程式があったときに

$$\begin{aligned} nf(x)-xf'(x) &= 0\cdots\text{前式} \\ f'(x) &= 0\cdots\text{後式} \end{aligned}$$

として、この二式からxを消去して求めている。

關の著書である『開方飜変之法』では、まず、

$$f(x)=0$$

をそのまま前式としているが、「前式これを畳み」として、大成算經と同様に

$$nf(x)-xf'(x)=0$$

を前式に置き直している。また、同書には

「交式斜乗して、生尅を求め、寄消を得るなり。」

とあり、これは、行列式を使用していることを表している。

2次方程式は本来ならば、2次の行列式を計算するはずであるが、直に x を消去することにより、行列式を使用せずに判別式を導き出している。3次方程式の場合は、4次の行列式を計算するはずであるが、「換式」という作業を行うことにより行列式の次数を減らし、2次の行列式を計算することで判別式を求めている。

ここで、3次方程式の判別式を求める際を例題にして「換式」を説明する。3次方程式を、

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

とすると、前式は $f(x)$ を畳む。つまり

$$\begin{array}{rcl} nf(x)-xf'(x) & = & 0\cdots\text{前式} \\ f'(x) & = & 0\cdots\text{後式} \end{array}$$

として、

$$\left\{\begin{array}{rcl} bx^2+cx+3d & = & 0\cdots\text{前式} \\ 3ax^2+2bx+c & = & 0\cdots\text{後式} \end{array}\right.$$

となる。この2つの式から x を消去するには、本来ならば、

$$\begin{vmatrix} c & 0 & 3b & 0 \\ 2b & c & 2c & 3d \\ 3a & 2b & b & 2c \\ 0 & 3a & 0 & b \end{vmatrix}$$

という行列式を計算することになる。しかしここで、

$$\begin{aligned}(\text{前式})\times 3d-(\text{後式})\times c \quad &\cdots\text{一式}\\ (\text{一式})\times x+(\text{前式})\times 2c-(\text{後式})\times 2b \quad &\cdots\text{二式}\end{aligned}$$

とすることで、x の次数を減らすことができる。これが換式である。すると一式、二式は、

$$\begin{cases}(6ac-2b^2)x+(9ad-bc) &= 0\cdots\text{一式}\\ (9ad-bc)x+(6bd-2c^2) &= 0\cdots\text{二式}\end{cases}$$

となり、この両式から x を消去している。つまり、

$$\begin{vmatrix}6bd-2c^2 & 9ad-bc\\ 9ad-bc & 6ac-2b^2\end{vmatrix}$$

を計算することで、3次方程式の判別式を求めているのである。

また、『開方飜変之法』では「適尽廉級法」を述べている。これは、

$$\begin{cases}f(x) &= 0\\ f''(x) &= 0\end{cases}$$

の2つの式から x を消去して求められるものである。これは、意味のないものとして「關孝和全集」などに紹介されているが3重根を求めるための条件として考えれば、全く意味のないものとは言えないのではないかと考える。

大成算經には2次から5次までの判別式があるが、判別式としては、2次方程式のものは、先ほども述べた通り符号が逆である。3次方程式、4次方程式のものも、本来のものとは逆である。しかし、5次方程式のものは符号は正しく記されている。その理由については現在研究中である。

全体の符号が逆ではあるが、2〜4次方程式の判別式のそれぞれの項は正しく、3次方程式の判別式は、正の項が3つ、負の項が2つ。4次方程式では、正の項が7つ、負の項が9つ。5次方程式だけ、写し間違いであろうと思われるものが一つある。大成算經に負の項として

「実方上廉中廉下廉再乗冪 八十段」

と記されているものは、正しくは、

「実方上廉冪中廉下廉再乗冪 八十段」

である。これを写し間違いとすれば、正の項が30、負の項が29の合計59項であり、正しいものが求められている。

このように、5次方程式の判別式が、正しく求められていたであろうということから、日本では17世紀後半には行列式を理解していたであろうということが推測できる。